ベクトルの性質 まとめ

ベクトル和

交換法則 $\mathbb{A}+\mathbb{B} = \mathbb{B}+\mathbb{A}$

結合法則 $\mathbb{A}+(\mathbb{B}+\mathbb{C}) = (\mathbb{A}+\mathbb{B})+\mathbb{C}$

分配法則 $m(\mathbb{A}+\mathbb{B}) = m\mathbb{A}+m\mathbb{B}$ (m, n：任意のスカラー)

$(m+n)\mathbb{A} = m\mathbb{A}+n\mathbb{A}$

恒等法則 $\mathbb{A}+\mathbb{O} = \mathbb{A}$ ($\mathbb{O}$：零ベクトル)

逆法則 $\mathbb{A}+(-\mathbb{A}) = \mathbb{O}$

あるいは $\mathbb{A}-\mathbb{A} = \mathbb{O}$

スカラー積

(ドット積とも言う)
内積

$\mathbb{A}\cdot\mathbb{B} = |\mathbb{A}||\mathbb{B}|\cos\theta$

$= A\ B\ \cos\theta$ (θ：$\mathbb{A}$と$\mathbb{B}$がつくる角 $0 \leq \theta \leq \pi$)

交換法則 $\mathbb{A}\cdot\mathbb{B} = \mathbb{B}\cdot\mathbb{A}$

分配法則 $\mathbb{A}\cdot(\mathbb{B}+\mathbb{C}) = \mathbb{A}\cdot\mathbb{B}+\mathbb{A}\cdot\mathbb{C}$

$m\mathbb{A}\cdot\mathbb{B} = \mathbb{A}\cdot(m\mathbb{B}) = m(\mathbb{A}\cdot\mathbb{B})$

$\mathbb{A}\cdot\mathbb{A} = |\mathbb{A}|^2 = A^2$

コーシー・シュワルツの不等式 $|\mathbb{A}\cdot\mathbb{B}| \leqq |\mathbb{A}||\mathbb{B}|$

三角不等式 $|\mathbb{A}+\mathbb{B}| \leqq |\mathbb{A}|+|\mathbb{B}|$

ベクトル積

(クロス積とも言う)
外積

$\mathbb{A}\times\mathbb{B} = |\mathbb{A}||\mathbb{B}|\sin\theta\ \mathbb{u}$

$= A\ B\ \sin\theta\ \mathbb{u}$

($\mathbb{u}$：$\mathbb{u}\perp\mathbb{A}$ かつ $\mathbb{u}\perp\mathbb{B}$ の単位ベクトル
右ネジの方向)

反交換則 $\mathbb{A}\times\mathbb{B} = -\mathbb{B}\times\mathbb{A}$

分配法則 $\mathbb{A}\times(\mathbb{B}+\mathbb{C}) = \mathbb{A}\times\mathbb{B}+\mathbb{A}\times\mathbb{C}$

$m\mathbb{A}\times\mathbb{B} = \mathbb{A}\times(m\mathbb{B}) = m(\mathbb{A}\times\mathbb{B})$

$\mathbb{A}\times\mathbb{A} = \mathbb{O}$

ラグランジュの恒等式 $|\mathbb{A}\times\mathbb{B}|^2 = |\mathbb{A}|^2|\mathbb{B}|^2-(\mathbb{A}\cdot\mathbb{B})^2$

エディントンのイプシロン

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} +1 & (i,j,k)=(1,2,3),(2,3,1),(3,1,2) \\ -1 & (i,j,k)=(1,3,2),(3,2,1),(2,1,3) \\ 0 & \text{others.} \end{cases}$$

基本ベクトル間のベクトル積 $\mathbf{i}\times\mathbf{i} = \mathbf{j}\times\mathbf{j} = \mathbf{k}\times\mathbf{k} = \mathbf{0}$

$$\mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j = \varepsilon_{ijk}\,\mathbf{e}_k \qquad \begin{cases} \mathbf{i}\times\mathbf{j} = -\mathbf{j}\times\mathbf{i} = \mathbf{k} \\ \mathbf{j}\times\mathbf{k} = -\mathbf{k}\times\mathbf{j} = \mathbf{i} \\ \mathbf{k}\times\mathbf{i} = -\mathbf{i}\times\mathbf{k} = \mathbf{j} \end{cases}$$

↑
Eddington's Epsilon

スカラー3重積

$$\mathbb{A}\cdot\mathbb{B}\times\mathbb{C} = \mathbb{C}\cdot\mathbb{A}\times\mathbb{B} = \mathbb{B}\cdot\mathbb{C}\times\mathbb{A}$$
$$= -\mathbb{A}\cdot\mathbb{C}\times\mathbb{B} = -\mathbb{C}\cdot\mathbb{B}\times\mathbb{A} = -\mathbb{B}\cdot\mathbb{A}\times\mathbb{C}$$

ベクトル3重積 $\mathbb{A}\times\mathbb{B}\times\mathbb{C}$

恒等式
$$\mathbb{A}\times(\mathbb{B}\times\mathbb{C}) = (\mathbb{A}\cdot\mathbb{C})\mathbb{B} - (\mathbb{A}\cdot\mathbb{B})\mathbb{C}$$
$$(\mathbb{A}\times\mathbb{B})\times\mathbb{C} = (\mathbb{A}\cdot\mathbb{C})\mathbb{B} - (\mathbb{B}\cdot\mathbb{C})\mathbb{A}$$

∴ $\mathbb{A}\times(\mathbb{B}\times\mathbb{C}) \neq (\mathbb{A}\times\mathbb{B})\times\mathbb{C}$ であることは明らか.

ヤコビの恒等式 $\mathbb{A}\times(\mathbb{B}\times\mathbb{C}) + \mathbb{B}\times(\mathbb{C}\times\mathbb{A}) + \mathbb{C}\times(\mathbb{A}\times\mathbb{B})$

ラグランジュの拡大恒等式
$$(\mathbb{A}\times\mathbb{B})\cdot(\mathbb{C}\times\mathbb{D}) = (\mathbb{A}\cdot\mathbb{C})(\mathbb{B}\cdot\mathbb{D}) - (\mathbb{B}\cdot\mathbb{C})(\mathbb{A}\cdot\mathbb{D})$$

∵ $\mathbb{C}=\mathbb{A}$ かつ $\mathbb{D}=\mathbb{B}$ とおくとラグランジュの恒等式を得る。

おまけ

ベクトル3重積の恒等式の覚え方

(左辺)： ベクトル3重積は「中央のベクトル」に注目するとよい。
(右辺第一項)： 中央のベクトルの係数は，残りのベクトルのスカラー積であり，
(右辺第二項)： これから中央のベクトルを括弧に入れ，係数を残りのベクトルとのスカラー積とした他のベクトルを引く。