

物理学レポート問題⑦ 解答編

[問7-1] (1) ブロック m_1 が $A \rightarrow B$ を移動する間のエネルギー保存則より

衝突直前の m_1 の速度を u_{1i} とすると $\frac{1}{2} m_1 u_{1i}^2 = mgh$
 $u_{1i} = \sqrt{2gh}$

衝突後の m_1, m_2 の速度を u_{1f}, u_{2f} とすると

$$m u_{1i} = m \sqrt{2gh} = +m_1 u_{1f} + m_2 u_{2f} \quad \dots \textcircled{1}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{BC \text{ 方向に正とした}}$

跳ね返り係数の式 (text p129 式 6.15) より

$$e = \frac{u_{1f} - u_{2f}}{u_{1i} - u_{2i}} = \frac{u_{1f} - u_{2f}}{\sqrt{2gh} - 0}$$

(完全) 弾性衝突のため $e = 1$ より $u_{1f} - u_{2f} = \sqrt{2gh} \quad \dots \textcircled{2}$

$\textcircled{1} - \textcircled{2} \times m_2$ より, u_{2f} を消去して $u_{1f} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \sqrt{2gh}$

\overrightarrow{BA} 方向に跳ね返る場合 $u_{1f} < 0$ より $m_1 - m_2 < 0$
 $m_1 < m_2$

(2) 衝突直後の m_1 の運動エネルギーが全て重力におおぼろげに等しいエネルギーに置き換わる時, 上昇する高さは最大となる。

$$\frac{1}{2} m_1 u_{1f}^2 = m_1 g h_{\max}$$

$$h_{\max} = \frac{u_{1f}^2}{2g} = \frac{1}{2g} \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \right)^2 2gh$$

$$= \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \right)^2 h$$

(解説) $m_2 \gg m_1$ のとき, $h_{\max} \sim h$ となる。

運動エネルギーが熱エネルギー, 振動のエネルギーに変換される衝突 = 弾性衝突

→ 上記のようにエネルギー保存が成り立つ。次の問7-2は
運動 運動量 保存。

[問 7-2] 衝突前後の運動量保存則より

$$m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = (m_1 + m_2) v_f$$

$$v_{2i} = 0 \text{ より}$$

$$v_f = \frac{m_1 v_{1i}}{m_1 + m_2} \quad \dots \textcircled{1}$$

衝突直後^{*注1}の運動エネルギー $K_f = \frac{1}{2}(m_1 + m_2) v_f^2$ がい

全て重力によるポテンシャルエネルギーに置き換わりますので

$$U = (m_1 + m_2) g h = \frac{1}{2}(m_1 + m_2) v_f^2$$

$$\textcircled{1} \text{ より} \quad \left(\frac{1}{2} \frac{(m_1 v_{1i})^2}{m_1 + m_2} \right)$$

$$v_{1i} = \left(\frac{m_1 + m_2}{m_1} \right) \sqrt{2gh}$$

(解説) およ、質量 m_1, m_2 と高さ h がわかれば、弾丸の速度がわかる。

注1). 衝突直前と衝突直後で全エネルギーは保存しますが

運動エネルギーは保存しない。失われる運動エネルギーは

ブロックの変形(弾性エネルギー)、その際生じる熱(熱エネルギー)

外部に放出される音(弾性エネルギー + 振動エネルギー) 等に変換される。

「コラム」 運動量保存の原理は非常に役に立つ。内部の細かいことがわかっていなくても、この原理を使って解ける問題がたくさんあるのである。(例えば上記の様に)。

宇宙に於ける、ロケットの推進も運動量保存の原理を使って理解できる。

大きな質量 M をもったロケットが、ロケットに対しておそろしい速度 V で質量 m の小さな片を飛ばす。はじめ、静止していたロケットは低速 v で動き出す。

運動量保存の原理を使って速度を計算すれば

$$v = \frac{m}{M} V \quad \text{となる。}$$

ロケットが噴出をつづけていくと、その速さはだんだん速くなる。その本質は質量の異なる物体の射出による反作用であり、お互い相手として空気がいる。