物理学レポート問題⑧ 解答編

[問8-1] (1) 回転数 = 単位時間当たりの周回数 ~ 振動数 ~ 周波数

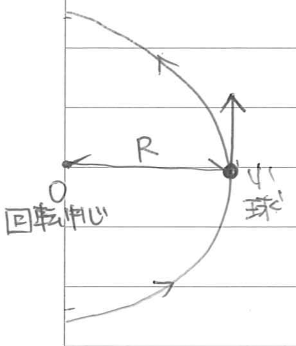
$$f = \frac{v}{2\pi R} \quad [\mathrm{Hz}] = [s^{-1}]$$

(2) 周期 = 1周するのにかかる時間 $T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi R}{v}$

(3) $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{v}{R}$

(4) $a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -r\omega = -R\cdot\frac{v^2}{R^2} = -\frac{v^2}{R}$

(5) 左図（接線方向に飛ぶ）



[問8-2] Text 157 page と講義Noteを参照して下さい。

$$\frac{d\boldsymbol{l}}{dt} = \mathbf{r}\times\mathbf{F}$$

力が中心力の場合 $\mathbf{F} = F\cdot\left(\frac{\mathbf{r}}{r}\right)$ （r方向の単位ベクトル）

$$= \mathbf{r}\times\left(F\cdot\frac{\mathbf{r}}{r}\right) = \frac{F}{r}(\mathbf{r}\times\mathbf{r}) = \mathbf{0}$$ より $\boldsymbol{l} = \mathrm{const.}$

[問8-3]

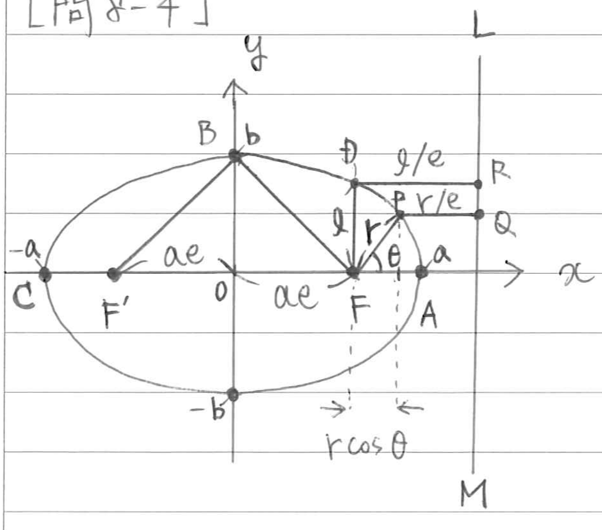
$$F = -\frac{GMm}{R^2}$$

$$= \frac{(6.673\times10^{-11})\times(7.36\times10^{22})}{(1.7374\times10^6)^2}\times m = -1.63\,m$$

$$= m\,g_{moon}$$

$$g_{moon} = 1.63 \ [m/s^2]$$

[問8-4]



(1) 楕円軌道の極座標表示の導出

円錐曲線を考える。定点Fと定直線LMへの距離の比が一定値 e に等しいような点Pの軌跡を考えると、左図に於いて

$$\frac{\overline{PF}}{\overline{PQ}} = e$$

P点の極座標を r, θ とする（焦点を中心とした）

$\theta = \frac{\pi}{2}$ での $\overline{FD} = l$ とすると

$$r\cos\theta + \frac{r}{e} = \frac{l}{e}$$ が成り立つ。

[問8-4] continued.. 前頁より $r\cos\theta + \frac{r}{e} = \frac{l}{e}$ より

$$r = \frac{l}{1+e\cos\theta}$$

(2) 前頁の図のA点では $\theta = 0$ である。

したがって $\overline{FA} = r_A = \dfrac{l}{1+e}$

C点では $\theta = \pi$ である。

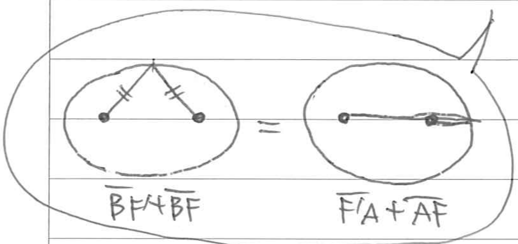
したがって $\overline{FC} = r_C = \dfrac{l}{1-e}$

と書けば、$r_A + r_C = 2a$.

長半径： $a = \dfrac{r_A+r_C}{2} = \dfrac{l}{2}\left(\dfrac{1}{1+e} + \dfrac{1}{1-e}\right) = \boxed{\dfrac{l}{1-e^2}}$

楕円の性質より 2つの焦点から軌道上にのばした線分の和は一定、
即ち

$$\overline{BF'} + \overline{BF} = \overline{F'A} + \overline{AF}$$
$$= \overline{F'O} + \overline{OF} + \overline{FA} + \overline{AF}$$
$$= ae + ae + a(1-e) + a(1-e)$$
$$= 2a.$$



よって $\overline{BF'} = \overline{BF} = a$.

$\triangle BOF$ におけるピタゴラスの定理より

$$a = \sqrt{b^2 + (a - r_A)^2}$$
$$\cancel{a^2} = b^2 + \left(a - \frac{l}{1+e}\right)^2$$
$$= b^2 + \cancel{a^2} - \frac{2al}{1+e} + \frac{l^2}{(1+e)^2}$$
$$b^2 = \frac{2al}{1+e} - \frac{l^2}{(1+e)^2} = \frac{2l^2}{(1+e)(1-e^2)} - \frac{l^2}{(1+e)^2}$$
$$= \frac{2l^2 - l^2(1-e)}{(1+e)^2(1-e)}$$
$$= \frac{l^2(1+e)}{(1+e)^2(1-e)} = \boxed{\frac{l^2}{1-e^2}}$$

$$\therefore b = \boxed{\frac{l}{\sqrt{1-e^2}}}$$